"ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2" 20/3/19

(Θεμ. Πρ. Αναλ.)

- Ακολουθίες Cauchy – Πλήρεις χώροι : (X, d)

ΟΡΙΣΜΟΣ : $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subseteq X$ λέγεται Cauchy αν-ν

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$, για $n, m \geq n_0$

Σχόλιο: (Επαγωγική κατασκευή)

$P_n(x)$ $(P_n(x,n))_{n=1,2,\dots}$ ακολ. προτασιακών τύπων

- $n=1$ $\exists \bar{x}_1 : P_1(\bar{x}_1)$ αληθής
- Έστω ότι $\exists \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k : P_1(\bar{x}_1), \dots, P_k(\bar{x}_k)$ αληθής $\Rightarrow \exists \bar{x}_{k_n} :$ $P_{k_n}(\bar{x}_{k_n})$ αληθής

Τότε $\exists (\bar{x}_n) : P_n(\bar{x}_n)$ αληθής $\forall n$

Παρατήρηση: Τ.Α.Ε.Ι.

(α) (x_n) είναι Cauchy

(β) $\forall r > 0 \ \exists x_0 \in X : S(x_0, r)$ περιέχει μια ουρά της (x_n) $(\exists n_0 : x_n \in S(x_0, r)$, για $n \geq n_0)$

(γ) (ε_n), $\exists \varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, $(\varepsilon_n)\downarrow$ $\exists (\bar{x}_n)$ ακολ. στο X: $S(\bar{x}_{k_n}, \varepsilon_{k_n}) \subseteq S(\bar{x}_n, \varepsilon_n)$ κ. κάθε $S(\bar{x}_n, \varepsilon_n)$ περιέχει ουρά της (x_n)

Αποδ.:

$\boxed{(\alpha) \Rightarrow (\beta)}$ $r > 0$

Για $\varepsilon = r$ στον ορισμό $\to \exists n_0 : d(x_n, x_{n_0}) < r$, $n \geq n_0$

παίρνουμε $x_0 = x_{n_0}$

$\boxed{(\beta) \Rightarrow (\alpha)}$ $\varepsilon > 0$

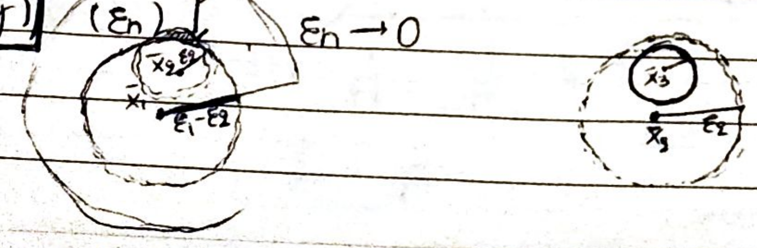
Για $r = \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{(\beta)} \exists x_0 \ \exists n_0 : x_n \in S(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$, $n \geq n_0$

$$n, m \geq n_0 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \varepsilon$$

Sketch

$\boxed{(\beta) \Rightarrow (\gamma)}$ $(\varepsilon_n)\downarrow$, $\varepsilon_n \to 0$

$\varepsilon_1 > 0$



②

Πρόταση: Αν $x_n \to x_0 \Rightarrow (x_n)$ είναι Cauchy

Αποδ.

$\varepsilon > 0$

$\exists n_0 : d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ για $n \geq n_0$

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon$$

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει ⚠

Π.χ. $X = (0, 1]$, $d = |(\cdot) - (\cdot)|$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1,2,\dots}$ είναι Cauchy στον X

$\varepsilon > 0$, $n \leq m$

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{2}{n} \to 0$$

$\exists n_0 : d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) < \varepsilon$ για $m \geq n \geq n_0$

$\left(\frac{1}{n}\right)$ δε συγκλίνει στον X

Πρόταση: (x_n) ακολ. στον X Τ.Α.Ε.Ι.:

(i) Η (x_n) συγκλίνει

(ii) $\exists (x_{k_n})$ υπακολ. της (x_n) που συγκλίνει

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: $d =$ διακριτή μετρική $\Rightarrow (X, d)$ πλήρης

ΛΥΣΗ:

(x_n) ακολ. Cauchy

$\varepsilon = \frac{1}{2} \longrightarrow \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$, $n, m \geq n_0$

$\Rightarrow x_n = x_{n_0}$, $n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \to x_0 = x_{n_0}$

ΑΣΚΗΣΗ (1-5)

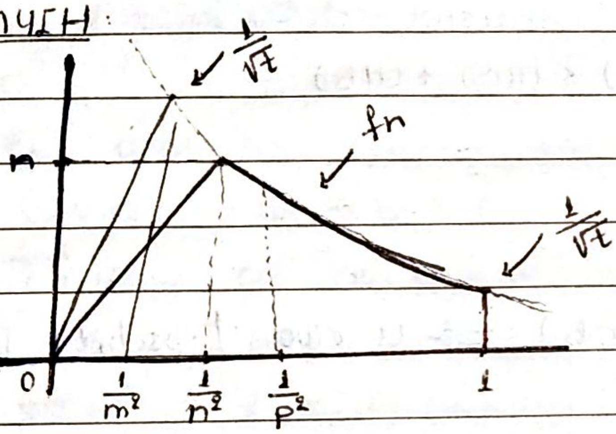
$X = C([0,1])$

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & \frac{1}{n^2} \le t \le 1 \\ tn^3, & 0 \le t < \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Ν.α.ο. η (f_n) είναι Cauchy (...)

ΛΥΣΗ:



Ισχύει $f_n(t) \le \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\forall t \in (0,1]$

$$\left(t < \frac{1}{n^2} \Rightarrow tn^3 < \frac{1}{n^2} \cdot n^3 = n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} < \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

$n \le m$

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{1/n^2} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \le 2 \cdot \int_0^{1/n^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{4}{n} \to 0$$

Έστω ότι $f_n \xrightarrow{d} g \in X$ $(d(f_n, g) \to 0)$

$p \in \mathbb{N}$

Αν $n > p$

$$\int_{1/p^2}^1 \left|g(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right|\,dt = \int_{1/p^2}^1 |g(t) - f_n(t)|\,dt \le \int_0^1 |g(t) - f_n(t)|\,dt \to 0$$

$\int_0^1 |f_n(t) - g|\,dt$

$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $\frac{1}{n^2} \le t$

$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{p^2}$

→

$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \in [\frac{1}{p}, 1]$ $\forall p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \in (0,1]$

$\lim_{t \to 0} p(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} = \infty$ ΑΤΟΠΟ

• ΟΡΙΣΜΟΣ : X , $u: X \to [0, \infty)$

u λέγεται συν/ση ιδεατού σημείου αν-ν :

(i) $u(a) - u(b) \leq d(a,b) \leq u(a) + u(b)$

(ii) $\inf u(X) = 0$

(iii) $0 \notin u(X)$

(i) $\Rightarrow |u(a) - u(b)| \leq d(a,b) \Rightarrow u$ είναι Lipschitz με στθ. 1

ΠΑΡΑΔ : $X = \mathbb{Q}$

$u: X \to [0, \infty)$, $u(x) = |\sqrt{2} - x| = d(\sqrt{2}, x)$

Κριτήρια πληρότητας : Δες Σημειώσεις ... (Κεφάλαιο 2 σελ.

Πρόταση : (X, d) πλήρης

$S \subseteq X$

(S, d) πλήρης $\Leftrightarrow S$ κλειστό στο X

Αποδ. :

$\Rightarrow$) (S,d) πλήρης $\xrightarrow[\text{(ii)}]{\text{Πρόταση 1.9}}$ S κλειστό

$\Leftarrow$) S κλειστό στο X

(Y,d) υπόχωρος του S

X κλειστό σε κάθε υπόχωρο

Αν (Y,d) υπόχωρος του $X \Rightarrow S$ κλειστό στο Y

$S \subseteq Y \subseteq X \xRightarrow[\text{Κεφ. I .§4}]{} S$ κλειστό στο Y

<u>Πρόταση:</u> (X,d) πλήρης
(Y,ρ) μ.χ.
$f: X \to Y$ 1-1 κ. επί, συνεχής κ.
f^{-1} <u>ομοιόμορφα</u> συνεχής $: Y \to X$
$\Rightarrow Y$ πλήρης.

<u>Αποδ.</u>:

(b_n) ακολουθία Cauchy στο Y

Θ.υ.α.ο. $b_n \to b_0 \in X$

Παίρνω τις αντίστροφες εικόνες:

$a_n = f^{-1}(b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$

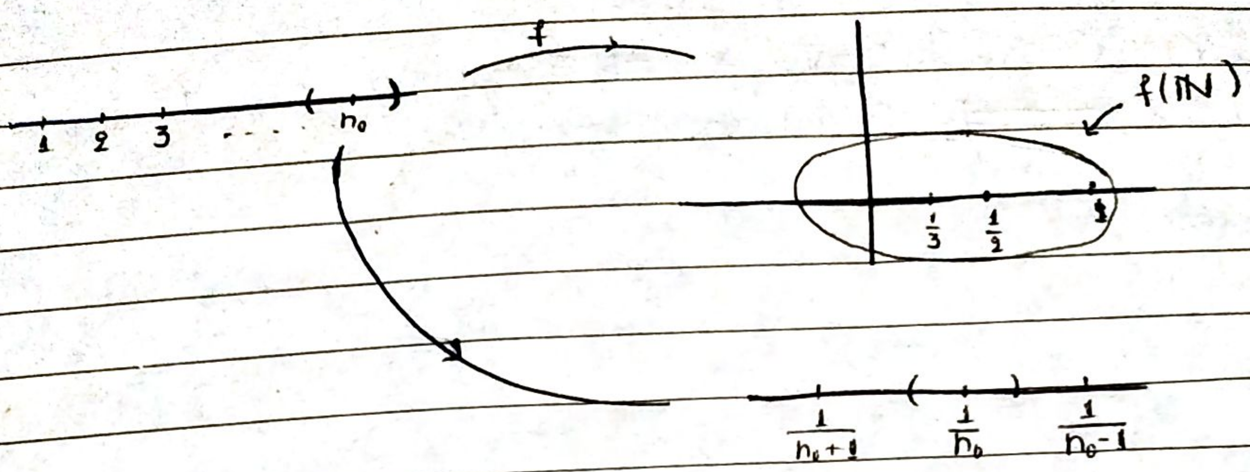
Ισχύει: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) < \varepsilon$ (*)
(από υπόθεση)

Αφού η (b_n) είναι Cauchy $\Rightarrow \exists n_0 : \rho(b_n, b_m) < \delta$, $n, m \geq n_0$
$\xRightarrow{(*)} d(a_n, a_m) < \varepsilon$, $n, m \geq n_0$
$\Rightarrow (a_n)$ Cauchy στο X

Αλλά X πλήρης $\Rightarrow \exists a_0 : a_n \to a_0 \in X$
$\xRightarrow[f \text{ συνεχής}]{} f(a_n) = b_n \Rightarrow f(a_0) = b_0$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ <u>(1-6)</u> $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, d = \text{διακριτή})$, $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, |(\cdot)-(\cdot)|)$
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$

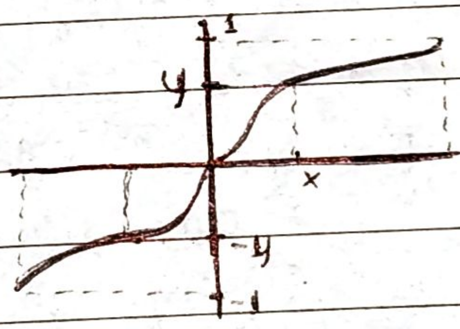
⑥



IN πλήρης

f(IN) δεν είναι πλήρης $\left(\left(\frac{1}{n}\right) \right.$ ακολ. Cauchy στο f(IN) που δε συγκλίνει στο f(IN) $\left. \right)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ (1 - 7) :



$f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$y = \frac{x}{1+|x|}$$

$$x > 0 : \quad y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow xy - x = -y$$

$$x < 0 : \quad y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow xy + x = -y$$

Άρα: $$f^{-1}(y) = \begin{cases} x = \dfrac{y}{1-y} , & y \in (0, 1) \\ x = \dfrac{y}{1+y} , & y \in (-1, 0) \\ x = 0 , & y = 0 \end{cases}$$